Практическая работа № 4

Тема: **Решение транспортных задач методом потенциалов**.

Цель: Сформировать умение решать транспортные задачи методом потенциалов.

Ход работы

***АЛГОРИТМ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛОВ***

1. Условия задачи записывают в форме распределитель­ной таблицы.

2. Сравнивают общий запас груза с суммарным спросом и в случае нарушения равенства



вводят в рассмотрение фиктивного поставщика (потребителя).

3. Строят начальный опорный план.

4. Вычисляют потенциалы  и  поставщиков и по­требителей.

5. Вычисляют оценки  свободных клеток. Если оценки всех свободных клеток неотрицательны, то исследуемый план является оптимальным и остается подсчитать транспортные расходы. Если же среди оценок есть отрицательные, то выбирают клетку с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой и переходят к следующему пункту алгоритма.

6. Загружают выделенную в предыдущем пункте свобод­ную клетку, получают новый опорный план и возвращаются к п. 4 алгоритма.

Замечание. Если в п. 5 все оценки положительны, то существу­ет единственный оптимальный план. Если же среди неотрицательных оценок имеется хотя бы одна нулевая, то задача имеет множество опти­мальных планов.

**Пример 1**. Студенческие отряды заняты уборкой кар­тофеля в трех хозяйствах. Картофель выращивается в этих хозяйствах на площадях в 20, 60 и 40 га, а урожайность соста­вила соответственно 150, 200 и 180 ц/га. Предполагается по­ставить Минску 1100т, ближайшему спиртзаводу 420т, а 800т необходимо доставить на железнодорожную станцию для по­следующей отправки за пределы Республики Беларусь. Рас­стояния от упомянутых хозяйств до указанных пунктов сдачи картофеля приведены в табл.1. Спланировать перевозки так, чтобы по возможности выполнить план поставок карто­феля при минимальных затратах (в т/км).

Таблица 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Хозяйство |  | Расстояние, км |  |
| до Минска | до спирт-завода | до железнодо­рожной станции |
| № 1 | 80 | 20 | 40 |
| № 2 | 100 | 30 | 20 |
| № 3 | 70 | 10 | 30 |

**Решение**. Прежде всего перейдем к единым единицам измерения. Урожайность в тоннах по хозяйствам составит соответственно 0,15, 0,20 и 0,18 т/га, собрано будет 300, 1200 и 720т, всего 2200т. Поставить же потребителям надо 2300т. Таким образом, возникает задача открытого типа. Придется ввести в рассмотрение фиктивного поставщика (ФП) с "запа­сом" картофеля в 2300-2200 = 100 т и нулевыми "тарифами".

Самостоятельно составить экономико-математи­ческую модель, обозначив через объем поставки картофе­ля (в т) *i*-м хозяйством *j*-му получателю (*i*=1,4; *j*=1,3); "тарифами" здесь являются расстояния (в км) от хозяйств до соответствующих получателей картофеля. Целевую функцию *f*, выражающую суммарный пробег транспорта с грузом (в т-км), надо минимизировать. После этого все данные задачи можно будет записать в виде табл. 2.

Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Хозяйство и количество собранного в нем картофеля, т | Минск  1100 | Спиртзавод  420 | Железнодорожная  Станция  800 |  |
| №1 300 | 80  300 | 20 | 40 |  |
| №2 1200 | 100  700 – | 30 | 20  + 500 |  |
| №3 720 | 70  + | 10  420 | 30  – 300 |  |
| ФП 100 | 0  100 | 0 | 0 |  |
|  |  |  |  |  |

В табл. 2 содержится опорный план, построенный способом "минимального элемента". Загружено *т + п -* 1 = 4+3 -1 = 6 клеток, так что план невырожденный. Для исследования его на оптимальность составляем систему уравнений для определения потенциалов:

.

Полагая, например, *и2 =* 0, находим: 

Теперь определяем оценки свободных клеток:



Среди оценок имеется отрицательная, поэтому план в табл.2 неоптимальный и его следует преобразовать в но­вый план, загрузив клетку (3; 1). Цикл для нее в табл.2 построен. По этому циклу для клетки (3; 1) находим постав­ку . После сдвига по циклу получаем новый опорный план, содержащийся в табл.3. Таблица 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 80  300 | 20 | 40 |  |
| 100  400 – | 30  **+** | 20  800 |  |
| 70  300 + | 10  – 420 | 30 |  |
| 0  100 | 0 | 0 |  |
|  |  |  |  |

Исследуя этот план аналогично предыдущему, находим по­тенциалы (они записаны рядом с таблицей), а по ним — оцен­ки свободных клеток:



Среди оценок одна отрицательная (S22), поэтому план не­оптимальный и его следует улучшить, загружая клетку (2; 2) поставкой . Новый опорный план приведен в табл.4.

Таблица 4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 80  300 – | 20  + | 40 |  |
| 100 | 30  400 | 20  800 |  |
| 70  700 + | 10  – 20 | 30 |  |
| 0  100 | 0 | 0 |  |
|  |  |  |  |

Исследуя его на оптимальность, находим потенциалы (они за­писаны рядом с таблицей) и оценки свободных клеток: 

Отрицательных оценок нет, следовательно, в табл.4 со­держится оптимальный план:



Итак, по оптимальному плану хозяйство № 1 весь со­бранный картофель должно направить в Минск; хозяйство № 2 доставляет 400 т на спиртзавод и 800 т на железнодорож­ную станцию; хозяйству №3 придется отправить 700т в Минск и 20т на спиртзавод. Судя по последней строке табл.4, 100т картофеля Минск недополучит. Пробег транс­порта минимизируется и составляет 101 200 т/км.

В табл.4 оценка S12 = 0. Это свидетельствует о том, что задача имеет и другие оптимальные планы. Загружая клетку (1; 2) поставкой, получим еще один оптимальный опорный план:



Все множество оптимальных планов задачи будет представлять собой выпуклую линейную комбинацию планов и :

, где 

**Самостоятельно выполнить следующее задание**.

**Задание 2.** Составить план перевозок с наименьшей общей стоимостью от четырех поставщиков соответственно в количествах 100. 400, 100 и 100 ед. к пяти потребителям соответственно в количествах 50, 100, 150,200 и 250 ед.; стоимости перевозок единицы груза приведены в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 1 | 6 | 8 | 12 | 16 |
|  | 16 | 10 | 8 | 6 | 15 |
|  | 4 | 1 | 9 | 11 | 13 |
|  | 3 | 2 | 7 | 7 | 15 |

**Контрольные вопросы**

1. Дайте постановку транспортной задачи и запишите ее математическую модель.
2. Какая модель называется закрытой; какая открытой? Как приводится открытая модель к закрытой?
3. Каким методом строится начальный опорный план? Сколько положительных компонент содержит невырожденный опорный план?
4. Опишите вычислительную схему метода потенциалов.

Индивидуальное задание по теме: **Решение транспортных задач методом потенциалов**.

**Задание 1.** В пунктах *А1, А2* и *А3* имеется в наличии однородный груз, который должен быть доставлен потребителям *В1 , В2, В3* и *В4.* потребность в грузе у которых различна. Известны стоимости *сij* перевозок единицы груза от i-го поставщика j-му потребителю. Все данные представлены в таблице. Требуется спланировать перевозки, т. е. указать, сколько единиц груза должно быть отправлено от i-го поставщика j-му потребителю, так, чтобы удовлетворить спрос потребителей и чтобы суммарные транспортные расходы были минимальными.

*Решить задачу методом потенциалов. При построении начального пиана перевозок воспользоваться правилом «северо-западного угла».*

**1.1**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 30 | 60 | 50 | 50 |
| *А1* | 40 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| *А2* | 40 | 5 | 3 | 6 | 4 |
| *Аз* | 110 | 1 | 5 | 5 | 3 |

**1.2**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 50 | 80 | 100 | 40 |
| *А1* | 80 | 3 | 5 | 1 | 4 |
| *А2* | 90 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| *Аз* | 100 | 4 | 6 | 3 | 2 |

**1.3**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 50 | 80 | 30 | 90 |
| *А1* | 60 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| *А2* | 120 | 6 | 3 | 5 | 2 |
| *Аз* | 70 | 3 | 2 | 6 | 3 |

**1.4**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 40 | 40 | 20 | 50 |
| *А1* | 50 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| *А2* | 70 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| *Аз* | 30 | 5 | 2 | 3 | 5 |

**1.5**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 30 | 60 | 40 | 50 |
| *А1* | 50 | 5 | 2 | 3 | 4 |
| *А2* | 70 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| *Аз* | 60 | 4 | 5 | 2 | 3 |

**1.6**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 20 | 30 | 50 | 40 |
| *А1* | 40 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| *А2* | 30 | 3 | 4 | 2 | 5 |
| *Аз* | 70 | 3 | 2 | 1 | 3 |

**1.7**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 30 | 70 | 60 | 40 |
| *А1* | 80 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| *А2* | 70 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *Аз* | 50 | 4 | 5 | 3 | 2 |

**1.8**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 40 | 70 | 90 | 50 |
| *А1* | 60 | 3 | 4 | 1 | 3 |
| *А2* | 90 | 2 | 3 | 5 | 4 |
| *Аз* | 100 | 6 | 4 | 3 | 2 |

**1.9**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 20 | 70 | 60 | 30 |
| *А1* | 50 | 1 | 4 | 3 | 1 |
| *А2* | 90 | 5 | 2 | 7 | 3 |
| *Аз* | 40 | 3 | 2 | 4 | 8 |

**1.10**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики и запас груза | | Потребители и потребность в грузе | | | |
| *В1* | *В2* | *В3* | *В4* |
| 50 | 50 | 60 | 40 |
| *А1* | 70 | 1 | 2 | 3 | 3 |
| *А2* | 90 | 1 | 6 | 3 | 2 |
| *Аз* | 40 | 8 | 2 | 1 | 6 |

**Задание 2.** *Решить следующие задачи*.

**2.1** На двух складах *А* и *В* находится по 90 т горючего. Перевозка одной тонны горючего со склада *А* в пункты 1,2,3 соответственно стоит 1,3 и 5 руб., а перевозка одной тонны со склада *В* в те же пункты—соответственно 2, 5 и 4 руб. В каждый пункт надо доставить по одинаковому количеству тонн горючего. Составить такой план перевозки горючего, при котором транспорт­ные расходы будут наименьшими.

**2.2** В резерве трех железнодорожных станций *А, В и С* нахо­дятся соответственно 60, 80 и 100 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки хлеба, если, пункту № 1 необходимо 40 вагонов, № 2 — 60 вагонов, № 3— 80 вагонов и № 4 — 60 вагонов. Стоимости перегонов одного вагона со станции *А* в указанные пункты соответственно равны 1, 2, 3, 4 руб., со станции *В* — 4, 3, 2, 0 руб. и со станции *С* — 0, 2, 2, 1 руб.

**2.3** Завод имеет три цеха *А, В, С* и четыре склада № 1, 2, 3, 4. Цех *А* производит 30 тыс. шт. изделий, цех *В —* 40 тыс. шт., цех *С*—20 тыс. шт. Пропускная способность складов за то жевремя характеризуется следующими показателями: склад № 1 —20 тыс. шт., склад № 2—30 тыс. шт., склад № 3—30 тыс. шт., склад № 4 —10 тыс. шт. Стоимости перевозки 1 тыс. шт. изделий из це­ха А в склады № 1, 2, 3, 4 соответственно равны 2, 3, 2, 4 руб.; из цеха В —3, 2, 5, 1 руб., а из цеха С—4, 3, 2, 6 руб. Соста­вить такой план перевозки изделий, при котором расходы на пере­возку 90 тыс. шт. изделий были бы наименьшими.

**2.4** На трех складах *А, В, С* находится сортовое зерно соот­ветственно 10, 15, 25 т, которое надо доставить в четыре пункта: пункту № 1—5 т, №2 — 10 т, № 3—20 т и № 4 —15 т. Стои­мости доставки одной тонны со склада *А* в указанные пункты соот­ветственно равны 8, 3, 5, 2 руб.; со склада *В—*4, 1, 6, 7 руб. и со склада С—1, 9, 4, 3 руб. Составить оптимальный план пере­возки зерна в четыре пункта, минимизирующий стоимость перевозок.

**2.5** Завод имеет три цеха А, Б и В и четыре склада № 1, 2, 3 и 4. Цех А производит 30 тыс. изделий, цех Б — 40, цех В — 20 тыс. изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется сле­дующими показателями: склад № 1 — 25 тыс. изделий, склад № 2 — 30, склад № 3 — 35, склад № 4 — 15 тыс. Стоимость перевозки из цеха А соот­ветственно на склады № 1, 2, 3 и 4 одной тысячи изделий равна 2; 3; 0,5 и 4 ден. ед., из цеха Б — 3; 2; 5 и 1 ден. ед., а из цеха В — 4; 3; 2 и 6 ден. ед. Составить план перевозки изделий на склады, минимизирующий транс­портные расходы.

**2.6** В резерве трех железнодорожных станций А, Б и В находится соответственно 60, 80 и 70 вагонов. Составить оптимальный план пере­гона этих вагонов к четырем пунктам погрузки зерна, если пункту № 1 требуется 40 вагонов, пункту № 2 — 60, пункту № 3 — 80, а пункту № 4 — 60 вагонов. Стоимость перегона одного вагона со станции А в указанные пункты равна соответственно 11, 12, 15 и 14ден.ед., со станции В — 14, 13, 12 и 11 ден. ед., со станции В — 15, 12, 14 и 16 ден. ед.